CORRIGÉ

Problème 1 : suite d'intégrales

1. Par définition, $(x-2)^0 e^x = e^x$. Ainsi
$$I_0 = \int_2^3 e^x dx = [e^x]_2^3 = \boxed{e^3 - e^2}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons $I_{n+1} - I_n$,
$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_2^3 (x-2)^{n+1} e^x dx - \int_2^3 (x-2)^n e^x dx \\ &= \int_2^3 \left((x-2)^{n+1} e^x - (x-2)^n e^x\right) dx \text{ par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_2^3 (x-2)^n ((x-2)-1) e^x dx \text{ en mettant } (x-2)^n \text{ en facteur dans l'intégrande} \\ &= \int_2^3 (x-2)^n (x-3) e^x dx \end{aligned}$$
Remarquons alors que $e^x \geq 0$, et de plus, pour $x \in [2,3]$, $(x-2)^n \geq 0$ et $x-3 \leq 0$. Ainsi $(x-2)^n(x-3)e^x \leq 0$ est négatif pour $x \in [2,3]$ et donc, par croissance de l'intégrale sur $[2,3]$, $I_{n+1} - I_n \leq 0$ ou encore $I_{n+1} \leq I_n$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$

Dans le cas d'une suite d'intégrale, la monotonie de la suite s'étudie souvent en exprimant $I_{n+1} - I_n$ comme l'intégrale d'une fonction dont on peut trouver facilement le signe (c'est à dire bien factorisée)

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que si $x \in [2,3]$, $(x-2)^n \geq 0$ et $e^x \geq 0$ et donc $(x-2)^n e^x \geq 0$. Ainsi, par positivité de l'intégrale sur $[2,3]$, on obtient que $I_n = \int_2^3 (x-2)^n e^x dx \geq 0$. D'où $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est minorée par } 0}$

4. D'après la question 2, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, d'après la question 3, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. En vertu du théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$

La question 4 suggère que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on peut donc en déduire que la réponse à la question 3 était bien « oui elle est minorée » car toute suite convergente est bornée et en particulier minorée

5. Soit $n \in \mathbb{N}$, on effectue une intégration par parties dans l'intégrale I_{n+1} :
$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_2^3 (x-2)^{n+1} e^x dx \\ &= \int_2^3 v(x)u'(x) \text{en posant } v : x \mapsto (x-2)^{n+1} \text{ et } u : x \mapsto e^x \\ &= [u(x)v(x)]_2^3 - \int_2^3 v'(x)u(x)dx \text{ par intégration par parties} \\ &= [(x-2)^{n+1}e^x]_2^3 - (n+1)\int_2^3 (x-2)^n e^x dx \\ &= 1^{n+1}e^3 - 0 - (n+1)I_n \\ &= e^3 - (n+1)I_n \end{aligned}$$

D'où $\boxed{I_{n+1} = e^3 - (n+1)I_n}$

Une relation de récurrence sur une suite d'intégrales s'obtiendra souvent avec une intégration par parties.

6. On utilise la relation de récurrence trouvée à la question précédente :

```python
p=int(input("entrer p pour calculer I_p"))
import numpy as np # Nécessaire pour calculer exp(1)

I=(np.e)**3-(np.e)**2
print("pour p=",0," l'intégrale vaut ",I)
for k in range(0,p):
    I=(np.e)**3-(k+1)*I
    print("pour p=",k+1," l'intégrale vaut ",I)

```

et l'on obtient alors l'affichage suivant :

```
entrer p pour calculer I_p17
pour p= 0  l'intégrale vaut  12.696480824257016
pour p= 1  l'intégrale vaut  7.389056098930649
pour p= 2  l'intégrale vaut  5.307424725326367
pour p= 3  l'intégrale vaut  4.163262747208563
pour p= 4  l'intégrale vaut  3.432485934353412
pour p= 5  l'intégrale vaut  2.9231072514206033
pour p= 6  l'intégrale vaut  2.5468934146640443
pour p= 7  l'intégrale vaut  2.2572830205393544
pour p= 8  l'intégrale vaut  2.0272727588728294
pour p= 9  l'intégrale vaut  1.8400820933321995
pour p= 10  l'intégrale vaut  1.6847159898656692
pour p= 11  l'intégrale vaut  1.5536610346653035
pour p= 12  l'intégrale vaut  1.4416045072040227
pour p= 13  l'intégrale vaut  1.3446783295353697
pour p= 14  l'intégrale vaut  1.2600403096924886
pour p= 15  l'intégrale vaut  1.1849322778003355
pour p= 16  l'intégrale vaut  1.1266204783822964
pour p= 17  l'intégrale vaut  0.9329887906886256
```

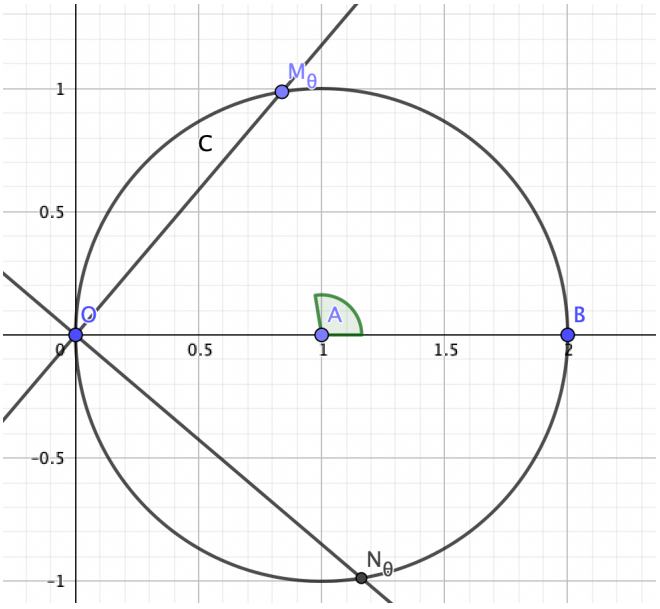
On remarquera que la variable `I` dans ce code contient la valeur de I_p.

Problème 2 : complexes et médiatrices

Partie A

1. Dans un cercle de centre O, la tangente au point P est perpendiculaire à la droite (OP) supportant le rayon. Ici, le rayon est supporté par la droite (AB) dont un vecteur directeur est d'affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 1$. Ainsi, le vecteur directeur de (AB) est colinéaire à $\overrightarrow{u}$. On en déduit que la droite T tangente au cercle C au point B admet $\overrightarrow{v}$ comme vecteur directeur. On en déduit qu'une équation de la tangente est donnée par $x = K$ où K est une constante à déterminer. On conclut en remarquant que $B \in T$ implique que $2 = K$. Ainsi $\boxed{\text{l'équation de la droite } T \text{ est } x = 2}$
2. On sait que $\theta \mapsto \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ pour $]-\pi, \pi]$ est une paramétrisation du cercle trigonométrique. En appliquant une translation de 1 à cette paramétrisation, on obtient donc une paramétrisation $\theta \mapsto (\cos(\theta) + 1) + i\sin(\theta) = z_\theta$ d'un nouveau cercle dont le centre est le translaté du centre cercle trigonométrique : O par 1 c'est à dire le point A et dont le rayon est le rayon du cercle trigonométrique : 1 (car les translations conservent les longueurs). On reconnait donc le cercle C. On a donc bien justifié que $\boxed{M_\theta \text{ décrit le cercle } C \text{ quand } \theta \text{ varie sur }]-\pi, \pi]}$
3. Calculons $z_0 = (\cos(0) + 1) + i\sin(0) = 2$. Ainsi M_0 et B ont même affixe et donc $\boxed{M_0 = B}$
4. Calculons $z_\pi = (\cos(\pi) + 1) + i\sin(\pi) = 0$. Remarquons alors qu'un vecteur directeur de la droite (AM_π) est colinéaire à $\overrightarrow{u}$. En appliquant le même raisonnement qu'à la question 1, on en déduit que l'équation de la tangente au cercle C au point M_π est $x = 0$. En particulier $\boxed{\text{la tangente au cercle } C \text{ au point } M_\pi \text{ et } T \text{ ne sont pas sécantes}}$

   Ici c'est probablement une bonne idée d'avoir fait un dessin au brouillon de la configuration géométrique. On voit facilement apparaître ces deux tangentes parallèles non-sécantes.
5. Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. On effectue un dessin :



   On cherche le point N_θ sous la forme $M_{\theta'}$ avec $\theta' \in]-\pi, \pi[$ et tel que $\overrightarrow{OM_\theta}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{OM_{\theta'}}$. En appliquant le théorème de l'angle au centre $\widehat{M_\theta A M_{\theta'}} = 2\widehat{M_\theta O M_{\theta'}}$. Ainsi, si l'on souhaite que $\widehat{M_\theta O M_{\theta'}} = \frac{\pi}{2}$ il suffit d'avoir $\widehat{M_\theta A M_{\theta'}} = \pi$ ou encore $[M_\theta, M_{\theta'}]$ est un diamètre du cercle C. Géométriquement, cela se traduit par $\theta' = \theta + \pi$. Ainsi $\boxed{N_\theta = M_{\theta+\pi} \text{ d'affixe } (1 - \cos(\theta)) - i\sin(\theta)}$

   On pourrait probablement s'en tirer avec une solution analytique. Elle serait beaucoup plus chronophage et bien moins élégante que l'utilisation du célèbre théorème de l'angle au centre.

Partie B On pose $\theta = \frac{2\pi}{3}$ et $M = M_{\frac{2\pi}{3}}$.

1. D'après la question 5 de la partie A, l'affixe du point N est donnée par

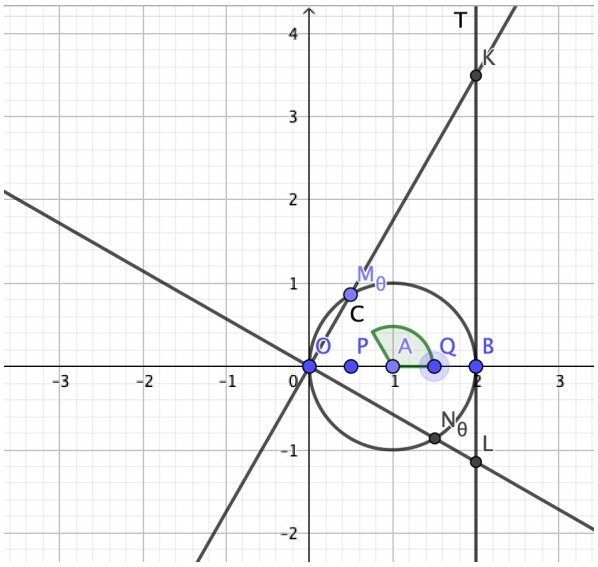
$$z_N = \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \boxed{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

2. Remarquons que M et N sont sur le cercle C, ils sont donc à égale distance de A. Par conséquent A appartient à la médiatrice de $[M,N]$. De plus $\overrightarrow{NM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AM}$ qui est un vecteur directeur de (MN) d'affixe $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit qu'une équation cartésienne de D la médiatrice du segment $[M,N]$ est donnée par

$$\frac{1}{2}(x-1)-\frac{\sqrt{3}}{2}y=0 \text{ ou encore } \boxed{x-\sqrt{3}y=1}$$

3. Remarquons que l'équation cartésienne de T est $x=2$ ainsi tous les points de T sont d'abscisses 2. C'est en particulier le cas pour K et L et l'on en déduit que le milieu I de K et L a également pour abscisse 2. Autrement dit la partie réelle de I vaut 2.

   Calculons l'ordonnée de K. On effectue un dessin :



   On définit P comme le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. Ainsi (PM) et (BK) sont parallèles et l'on peut donc appliquer le théorème de Thalès dans le triangle OBK. On obtient alors

$$\frac{BK}{PM}=\frac{OB}{OP}$$

   or l'abscisse de P est égal à l'abscisse de M c'est à dire 0.5. Ainsi, $BK=PM\times\frac{2}{0.5}=4PM=2\sqrt{3}$.

   On effectue un calcul similaire pour le calcul de l'abscisse de L (Q étant le projeté orthogonal de N sur l'axe des abscisses) et l'on a alors $BL=QN\times\frac{2}{1.5}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. L'ordonnée de L est donc $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (en rajoutant le signe). Ainsi l'ordonnée de I est donnée par

$$\frac{2\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}(6-2)}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

   D'où

$$\boxed{z_I=2+i\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

4. Le point I étant le milieu de $[K,L]$, on en déduit qu'il appartient à la médiatrice D'. De plus $\overrightarrow{KL}$ est vertical donc la médiatrice de $[K,L]$ qui est orthogonal à $\overrightarrow{KL}$ est horizontal. Ainsi son équation cartésienne est de la forme $y=K$ où K est une constante à déterminer. Puisque I appartient à D' on en déduit que $\frac{2\sqrt{3}}{3}=K$ et donc l'équation cartésienne de D' est donnée par

$$\boxed{y=\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

5. Une condition nécessaire pour qu'un point J soit équidistant de M, N, K et L est qu'il appartienne à la fois à D et à D' médiatrices de $[M,N]$ et $[K,L]$ respectivement. Puisque ces deux droites sont clairement non parallèles (au vu des équations cartésiennes obtenues respectivement aux

question 2 et 4), il y a un unique point d'intersection pour D et D'. Notons x_J et y_J l'abscisse et l'ordonnée de ce point d'intersection. Ces coordonnées vérifient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_J - \sqrt{3}y_J &=& 1 \\ y_J &=& \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y_J &=& \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x_J - \sqrt{3}\frac{2\sqrt{3}}{3} &=& 1 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y_J &=& \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x_J - 2 &=& 1 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y_J &=& \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x_J &=& 3 \end{array}\right.$$

Montrons maintenant que le point J est équidistant aux quatre points M, N, K et L. Puisque $JM = JN$ et $JK = JL$ car J appartient à D et à D' respectivement, il suffit de vérifier que $JM = JK$. On calcule donc :

$$JM^2 = |z_M - z_J|^2 = \left(\frac{1}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{25}{4} + 3\frac{1}{36} = \frac{76}{12} = \frac{19}{3}$$

$$JK^2 = |z_K - z_J|^2 = (2-3)^2 + \left(2\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1 + 3\frac{16}{9} = \frac{19}{3}$$

ainsi $JM = JK$ et l'on en déduit que $\boxed{J \text{ est équidistant aux quatre points } M, N, K \text{ et } L}$

Le piège ici est de penser que le travail est terminé une fois que l'on a trouvé les coordonnées de l'intersection des deux médiatrices. On obtient seulement condition nécessaire pour un point équidistant à M, N, K, L. Il faut ensuite effectivement vérifier que l'unique point obtenu est équidistant aux quatre points. En exploitant les égalités données par l'appartenance aux médiatrices, il suffit de ne calculer que deux longueurs.

Problème 3 : géométrie dans l'espace

1. Nous allons appliquer la réciproque au théorème de Pythagore. Commençons donc par calculer AB^2, AC^2 et BC^2. On a

$$AB^2 = (1-(-1))^2 + (2-1)^2 + (4-3)^2 = 2^2 + 1^2 + 1^2 = 6$$
$$AC^2 = (-1-(-1))^2 + (3-2)^2 + (3-4)^2 = 0^2 + 1^2 + (-1)^2 = 2$$
$$BC^2 = (-1-1)^2 + (3-1)^2 + (3-3)^2 = (-2)^2 + 2^2 + 0^2 = 8$$

On constate donc que $BC^2 = AB^2 + AC^2$ et donc, par la réciproque au théorème de Pythagore, le triangle $\boxed{ABC \text{ est rectangle en } A}$

On aurait aussi pu calculer $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et vérifier que cela fait 0.

2. On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BD}(2,2,2)$, $\overrightarrow{AB}(2,-1,-1)$ et $\overrightarrow{AC}(0,1,-1)$. On calcule maintenant

$$(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AB}) = 4 - 2 - 2 = 0 \text{ et } (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}) = 0 - 1 + 1 = 0$$

D'où $\overrightarrow{BD}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et $\boxed{\text{la droite } (BD) \text{ est donc perpendiculaire au plan } (ABC)}$

3. On sait que le volume d'un tétraèdre est donné par l'aire de la base multipliée par la hauteur divisée par 3 : $\frac{base \times h}{3}$. Ici on prend pour base le triangle ABC. Puisqu'il est rectangle en A (avec la question 1), on en déduit que son aire est donnée par $base = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}$. Puisque (BD) est orthogonal à (ABC) (avec la question 2), on en déduit que la hauteur du tétraèdre issue de D est le segment $[BD]$. Ainsi on a

$$h = BD = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$$

et donc l'aire du tétraèdre est donnée par

$$\frac{base \times h}{3} = \frac{\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}}{3} = \boxed{2}$$

4. Calculons les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}$. On commence par calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AC}(0,1,-1)$ et $\overrightarrow{AD}(4,1,1)$ et l'on en déduit

$$\overrightarrow{w}(2,-4,-4)$$

Ce vecteur est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ et l'on en déduit que c'est un vecteur normal au plan (ACD). Ainsi si l'on prend $M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ quelconque, on aura $M \in (ACD)$ si et seulement si $(\overrightarrow{AM} | \overrightarrow{w}) = 0$ si et seulement si $2(x+1) - 4(y-2) - 4(z-4) = 0$ si et seulement si $2x - 4y - 4z = -26$ ou encore $\boxed{x - 2y - 2z = -13}$ qui est une équation cartésienne du plan (ACD).

On rappelle, à toutes fins utiles, que pour trouver dans $\mathbb{R}^3$ un vecteur orthogonal commun à $\overrightarrow{u}(x,y,z)$, $\overrightarrow{v}(a,b,c)$ on peut former le produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ des deux définis par ses coordonnées $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}(yc - bz, za - xc, xb - ya)$

5. Un vecteur normal au plan (ACD) est donné par $\overrightarrow{n}(1,-2,-2)$. Ainsi on obtient une représentation paramétrique de la droite Δ sous la forme $t \mapsto M_t(1+t, 1-2t, 3-2t)$. Ainsi si un point quelconque M_t de la droite Δ appartient au plan (ACD) d'équation cartésienne $x - 2y - 2z = -13$ (avec la question 4) si et seulement si $(1+t) - 2(1-2t) - 2(3-2t) = -13$ si et seulement si $9t = -6$ si et seulement si $t = -\frac{2}{3}$.

On en déduit que l'unique point d'intersection $H = M_{-\frac{2}{3}}$ de la droite Δ et du plan (ACD) a pour coordonnées $\boxed{\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{13}{3}\right)}$

6. On rappelle la formule utilisée à la question 3 pour calculer le volume du tétraèdre $ABCD$: $2 = \frac{base \times h}{3}$. Contrairement à la question 3, nous allons considérer la hauteur issue de B. Par définition la hauteur issue de B est le segment entre B et l'intersection de la face opposée (ACD)

avec la droite Δ passant par B et dirigée par une normale à (ACD). Ainsi $h = BH$. D'autre part, la base est le triangle ACD. Ainsi

$$aire(ACD) = \frac{6}{h} = \frac{6}{BH}$$

Pour finir, on calcule

$$\begin{aligned} BH &= \sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{7}{3}\right)^2 + \left(3-\frac{13}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{16}{9}} \\ &= \sqrt{\frac{36}{9}} \\ &= \frac{6}{3} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{aire(ACD) = 3}$

Il ne faut pas ici chercher une hauteur du triangle ACD pour ensuite calculer l'aire de ce triangle avec la formule habituelle. C'est possible mais trop calculatoire. Le H de la question suggère que H est le pied de la hauteur d'un certain tétraèdre. Tétraèdre dont on a déjà calculé le volume à la question 3.

Problème 4 : équation fonctionnelle

Partie A- Existence d'une fonction satisfaisant la propriété (E)

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Montrons l'égalité directement :

$$\begin{aligned}
f_m(x+y) \times f_m(x-y) &= e^{m(x+y)^2} e^{m(x-y)^2} \\
&= e^{mx^2+2mxy+my^2} e^{mx^2-2mxy+my^2} \text{ en appliquant deux identités remarquables} \\
&= e^{(mx^2+2mxy+my^2)+(mx^2-2mxy+my^2)} \text{ car pour tous réels } a \text{ et } b,\ e^a e^b = e^{a+b} \\
&= e^{2mx^2+2my^2} \\
&= e^{2mx^2} e^{2my^2} \text{ car pour tous réels } a \text{ et } b,\ e^{a+b} = e^a e^b \\
&= (e^{mx^2})^2 (e^{my^2})^2 \\
&= (f_m(x))^2 (f_m(y))^2
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\text{la fonction } f_m \text{ vérifie la propriété (E)}}$

Partie B - Propriétés des fonctions satisfaisant la propriété (E)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, l'équation $x^2 = x^4$ est vérifiée si et seulement si $x^2 - x^4 = 0$ si et seulement si $x^2(1-x^2) = 0$ si et seulement si $x^2(1-x)(1+x) = 0$ si et seulement si $\boxed{x = 0,\ x = 1 \text{ et } x = -1}$

2. Soit f vérifiant la propriété (E). Prenons l'équation de la propriété (E) et évaluons-là en $x = y = 0$. On aura alors
$$f(0-0)f(0-0) = f(0)^2 f(0)^2$$
et donc $f(0)^2 = f(0)^4$ et, en vertu de ce qui a été fait à la question 1, on en déduit que $\boxed{f(0) \in \{-1, 0, 1\}}$

3. Soit f vérifiant la propriété (E). Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que $f(0) = 0$. On applique l'égalité de la propriété (E) pour $y = 0$ et l'on a donc $(f(x))^2 = (f(x))^2 f(0)^2 = 0$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = 0$ c'est-à-dire que $\boxed{f \text{ est la fonction nulle sur } \mathbb{R}}$

4. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $f\left(\frac{a}{2^n}\right) = 0$.
   — **Initialisation** Pour $n = 0$, $\frac{a}{2^0} = a$ donc, par hypothèse $f\left(\frac{a}{2^0}\right) = f(a) = 0$.
   — **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $f\left(\frac{a}{2^n}\right) = 0$. On applique l'équation de la propriété (E) pour $x = \frac{a}{2^{n+1}} = y$:
   $$f\left(\frac{a}{2^n}\right) f(0) = f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)^2 f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)^2 = f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)^4$$
   or $f\left(\frac{a}{2^n}\right) = 0$ par hypothèse de récurrence donc $f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)^4 = 0$ et donc $f\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) = 0$.
   $\boxed{\text{D'où la conclusion par récurrence}}$

   Remarquons que le point admis consiste à appliquer l'hypothèse de continuité de f mais d'un point de vue séquentielle. Puisque f est continue :
   $$0 = \lim_{n\to+\infty} 0 = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{a}{2^n}\right) = f\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{a}{2^n}\right) = f(0)$$
   Il est ici admis car la caractérisation séquentielle de la continuité des fonctions est hors-programme dans le secondaire.

5. $\boxed{\text{On raisonne par l'absurde}}$. Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(y) < 0$. Puisque f est continue on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et il existe $a \in \mathbb{R}$ (dans $[x, y]$ si $x < y$ ou dans $[y, x]$ si $x > y$) tel que $f(a) = 0$. D'après la question précédente, cela implique que f est la fonction nulle ce qui est une contradiction. $\boxed{\text{D'où la conclusion : } f \text{ est soit strictement positive sur } \mathbb{R}, \text{ soit strictement négative sur } \mathbb{R}}$

Partie C- Identification des fonctions strictement positives sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la propriété (E)

1. Remarquons que si f est strictement positive sur $\mathbb{R}$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ et en particulier $f(0) > 0$ et en vertu de la trichotomie exhibée à la partie B question 2, $f(0) = 1$. Ainsi $g(0) = \ln(f(0)) = \ln(1) = \boxed{0}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. D'une part
$$\ln(f(x+y)f(x-y)) = \ln(f(x+y)) + \ln(f(x-y)) = g(x+y) + g(x-y).$$
D'autre part
$$\ln((f(x))^2(f(y))^2) = \ln((f(x))^2) + \ln((f(y))^2) = 2\ln(f(x)) + 2\ln(f(y)) = 2g(x) + 2g(y).$$
Ainsi, puisque f vérifie la propriété (E), on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$:
$$f(x+y)f(x-y) = (f(x))^2(f(y))^2.$$
D'où, en passant au logarithme et avec les égalités ci-dessus :
$$\boxed{g(x+y) + g(x-y) = 2g(x) + 2g(y)}$$

3. Montrons par récurrence à deux pas sur $n \in \mathbb{N}$, $g(n) = g(1) \times n^2$.
   — **Initialisation** Pour $n = 0$, $g(0) = 0$ avec la question 1 et donc $g(0) = g(1) \times 0^2$. Pour $n = 1$, $g(1) = g(1) \times 1^2$.
   — **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $g(n) = g(1) \times n^2$ et $g(n+1) = g(1) \times (n+1)^2$. On applique l'équation de la question 2 pour $x = n+1$ et $y = 1$ et l'on obtient
   $$g(n+2) + g(n) = 2g(n+1) + 2g(1) \text{ ou encore } g(n+2) = 2g(n+1) - g(n) + 2g(1).$$
   On applique les hypothèses de récurrence :
   $$\begin{aligned} g(n+2) &= 2g(1)(n+1)^2 - g(1)n^2 + 2g(1) \\ &= g(1)(2n^2 + 4n + 2 - n^2 + 2) \\ &= g(1)(n^2 + 4n + 4) \\ &= g(1)(n+2)^2 \end{aligned}$$
   $\boxed{\text{D'où la conclusion par récurrence}}$
   On comprend qu'il faut faire une récurrence à deux pas en essayant une récurrence à un pas et en voyant que l'on a besoin d'un terme supplémentaire.

4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On applique l'égalité admise $g(nx) = n^2 g(x)$ à $x = \frac{1}{p}$ et $n = p$. On en déduit que $g(1) = p^2 g\left(\frac{1}{p}\right)$ et donc $\boxed{g\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p^2} g(1)}$
   Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on applique l'égalité admise $g(nx) = n^2 g(x)$ à $x = \frac{1}{p}$ et l'on obtient $\boxed{g\left(\frac{n}{p}\right) = \frac{n^2}{p^2} g(1)}$
   Pour le point admis, il s'agit simplement de faire comme la question 3 mais d'appliquer l'équation de la question 2 pour $x \leftarrow (n+1)x$ et $y \leftarrow x$.

5. Soit f une fonction continue et strictement positive vérifiant la propriété (E) alors, $g : x \mapsto \ln(f(x))$ vérifie, en vertu de ce qui est admis, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(1)x^2$ et donc $\ln(f(x)) = g(1)x^2$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{g(1)x^2}$. On en déduit que $f = f_{g(1)}$. Réciproquement il est clair que pour tout $m \in \mathbb{R}$, f_m est positive et vérifie la propriété (E) avec la Partie A. On en déduit que l'ensemble des fonctions continues positives vérifiant la propriété (E) est $\boxed{\text{l'ensemble des fonctions } f_m \text{ pour } m \in \mathbb{R}}$
   Le point admis est une application de la caractérisation séquentielle de la continuité et de la densité de $\mathbb{Q}$. On pourra également retrouver cela dans l'épreuve 1 du Capes externe 2023 Problème 2, Partie II